Algebry operatorów w przestrzeniach Hilberta
Lista 2 (częściowe izometrie i rzuty w algebrach von Neumanna)

Zad 1. Niech $u \in B(H)$. Pokazać, że następujące warunki są równoważne

a) u jest częściową izometrią,

b) u^* jest częściową izometrią,

c) u^*u jest rzutem (na podprzestrzeń inicjalną),

d) uu^* jest rzutem (na podprzestrzeń finalną),

e) $u = uu^*u$,

f) $u^* = u^*uu^*$.

Zad 2. Wykazać, że dowolny element $a \in B(H)$ posiada rozkład biegunowy, tzn. istnieje częściowa izometria $u \in B(H)$ oraz operator dodatni $|a| \in B(H)$ takie, że się zapisać w postaci

$$a = u|a| \qquad \text{oraz} \qquad \ker u = \ker |a|.$$

Ponadto przedstawienie to jest jednoznaczne.

Zad 3. Wykazać, że dla dowolnego elementu algebry von Neumanna $\mathcal{M} \subset B(H)$ czynniki jego rozkładu biegunowego należą do $\mathcal{M}$. Wyciągnąć stąd wniosek, że $\mathcal{M}$ zawiera rzuty na obrazy i jądra wszystkich swoich elementów.

Zad 4. Niech A będzie C^*-algebrą operatorów mnożenia przez funkcje z $C([0,1])$ na przestrzeni Hilberta $H = L^2[0,1]$, tj. $A \cong C([0,1])$.

a) Wyznaczyć rozkład biegunowy elementu $a \in A$ i zauważyć, że częściowa izometria w tym rozkładzie nie musi należeć do A.

b) Pokazać, że komutant A' algebry A składa się z operatorów mnożenia przez funkcję istotnie ograniczone. Wyciągnąć stąd wniosek, że $L^\infty[0,1]$ jest W^*-algebrą oraz $A'' \cong L^\infty[0,1]$.

Zad 5. Niech p i q będą rzutami na przestrzeni Hilberta H. Wykazać, że następujące warunki są równoważne

a) $p \leq q$,

b) $pq = p$,

c) $qp = p$,

d) $pH \subset qH$

e) $\|px\| \leq \|qx\|$, $x \in H$,

f) $q - p$ jest rzutem.

Zad 6. Dla danej algebry $\mathcal{M}$ obliczyć komutant $\mathcal{M}'$ i bikomutant $\mathcal{M}''$. Które z powyższych algebr są faktorami? Określić typ tych faktorów. Opisać stukturę $(\mathrm{Proj}(\mathcal{M})/\sim, +)$.

a) $\mathcal{M} = B(H)$

b) $\mathcal{M} = B(H) \oplus B(H) \subset B(H \oplus H)$

c) $\mathcal{M} \subset B(H \oplus H)$ jest algebrą operatorów postaci

$$a(x \oplus y) = (a_{11}x + a_{12}y) \oplus (a_{21}x + a_{22}y),$$

gdzie $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $i, j = 1, 2$.

d) $\mathcal{M} \cong \ell^\infty$ jest algebrą operatorów mnożenia przez elementy z ℓ^∞ na ℓ^2.

e) $\mathcal{M} \cong L^\infty[0,1]$ jest algebrą operatorów mnożenia przez elementy z $L^\infty[0,1]$ na $L^2[0,1]$.

f) $\mathcal{M} \subset B(H)$, gdzie $H = L^2[0,1]$, jest algebrą operatorów postaci

$$(ax)(t) = \begin{cases} a_{11}x(t) \quad + a_{12}x(t+\frac{1}{2}) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ a_{21}x(t-\frac{1}{2}) + a_{22}x(t) & t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

g) $\mathcal{M} \subset B(H)$, gdzie $H = L^2[0,1]$, jest algebrą operatorów postaci

$$(ax)(t) = \begin{cases} a_{11}(t)x(t) \quad + a_{12}(t)x(t+\frac{1}{2}) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ a_{21}(t)x(t-\frac{1}{2}) + a_{22}(t)x(t) & t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

gdzie $a_{11}, a_{12} \in L^\infty[0, \frac{1}{2}]$ i $a_{21}, a_{22} \in L^\infty[\frac{1}{2}, 1]$.